Thème : Les équations différentielles

Objectifs :

* Compréhension de l'entrée en résonance d'un système.
* Exploitation des connaissances dans une situation concrète.

Prérequis : Les équations différentielles.

Compétences visées :

* Résolution d'une équation différentielle du second ordre avec second membre.
* Utilisation d'un logiciel de calcul formel (type XCAS)
* Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique (type Géogébra)

Ouverture : Séries de Fourier

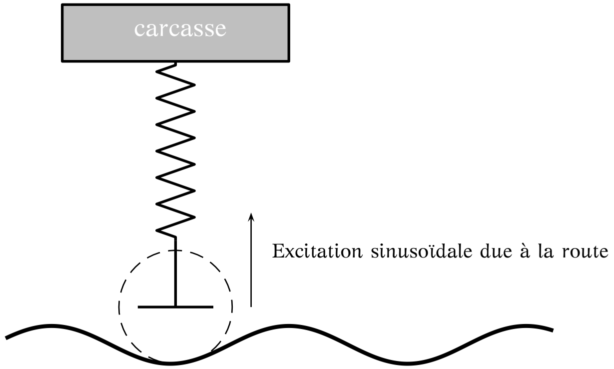
Temps estimé : 1h30

Interdisciplinarité : Mécanique

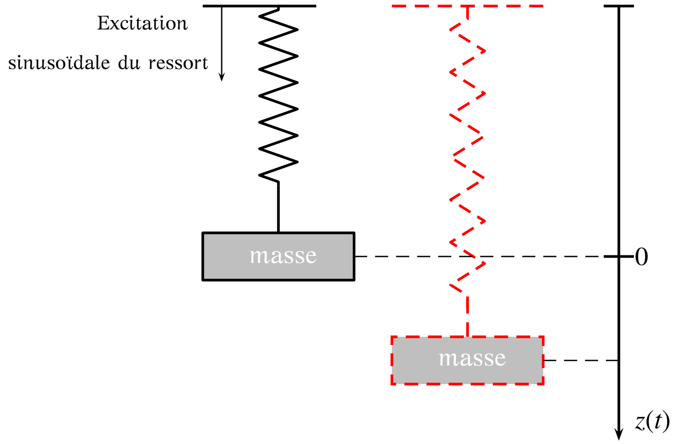
Entrée en résonance d'un système

Partie A - Situations concrètes

Sur le dessin ci-dessous est modélisée une roue de voiture sur une route ayant un profil sinusoïdal. Sur ce dessin nous avons imaginé que l'amortisseur d'une voiture était constitué d'un simple ressort



On peut simplifier le problème en ne considérant que le déplacement vertical de la voiture. Cette situation est équivalente à celle de la masse suspendue à un ressort et stimulée sinusoïdalement.



Que ce passe-t-il lorsqu'on fait varier la fréquence de la pulsation de l'excitation ?
Vidéo d'entrée en résonance d'un ressort http://www.youtube.com/watch?v=YPNG-9WZcVI

Mise en équation du système

But : Étudier le mouvement de la masse suspendue. On néglige les frottements.
On appelle $z(t)$ la côte de la masse autour de sa position d'équilibre en fonction du temps t
Paramètres : Les éléments à prendre en compte sont :

- la masse m (de la voiture)
- la constante de raideur du ressort k.
- la pulsation ω de la stimulation et son amplitude A.

Un bon physicien nous fournit l'équation différentielle d'inconnue la fonction z en fonction du temps t.

$$z''(t) + \frac{k}{m} z(t) = \frac{k}{m} A\cos(\omega t)$$

Travaillons sur des valeurs relatives à l'exemple concret de la voiture

$$\begin{cases} m = 400 \text{ kg} & (400 \text{ kg = un quart de voiture}) \\ A = 0.03 \text{ mètre} & \text{c'est-à-dire 3 cm} \\ k = 10^4 \text{ N/m} \end{cases}$$

Partie B - Étude d'une équation différentielle

1. Montrer que l'équation précédente devient : $z''(t) + 25z(t) = \frac{3}{4}\cos(\omega t)$ $\qquad (E)$
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $z''(t) + 25z(t) = 0$.
3. 1er cas : $\omega \neq 5$:
   a. Montrer, en utilisant un logiciel de calcul formel (type XCAS) si besoin, que :
   $$z_1 : t \longmapsto \frac{3}{4} \times \frac{1}{25-\omega^2}\cos\omega t \quad \text{est solution particulière de } (E)$$
   b. Déterminer la forme de la solution générale Z de (E).
   c. Les conditions initiales sont
   $$\begin{cases} Z(0) = 0 & \text{la position d'équilibre du ressort à } t = 0 \\ Z'(0) = 0 & \text{composante verticale de la vitesse initiale nulle} \end{cases}$$
   Montrer que la solution générale est donnée par
   $$Z : t \longmapsto \frac{3}{4} \times \frac{1}{25-\omega^2}(\cos\omega t - \cos 5t)$$
   d. Représenter, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (type Géogébra) la solution Z en fonction de la pulsation ω. *On pourra créer un curseur pour ω*

4. **2$^{\text{ème}}$ cas** : $\omega = 5$:

a. En utilisant un logiciel de calcul formel (type XCAS) si besoin, vérifier que :

$$z_2 : t \longmapsto \frac{3}{40} t \sin 5t \quad \text{est solution particulière de } (E)$$

Commandes XCAS

Définition d'une fonction : $f(t) := 3 * t + 2$

Dérivation d'une fonction : derive$(f(t), t)$

b. En déduire la forme de la solution générale Z de (E).

c. Les conditions initiales du système sont :

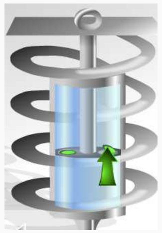
$$\begin{cases} Z(0) = 0 & \text{la position d'équilibre du ressort à } t = 0 \\ Z'(0) = 0 & \text{composante verticale de la vitesse intiale nulle} \end{cases}$$

Vérifier que la solution particulière z_2 vérifient les conditions initiales.

d. Représenter, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique la solution z_2.
Conjecturer la limite de $z_2(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
Cette situation est-elle réaliste ?

Il se produit ce qu'on appelle un **phénomène de résonance**

Afin d'éviter l'entrée en résonance du système un amortisseur de voiture est muni d'un système d'augmentation des frottements comme celui représenté ci-dessous (piston dans un fluide visqueux)



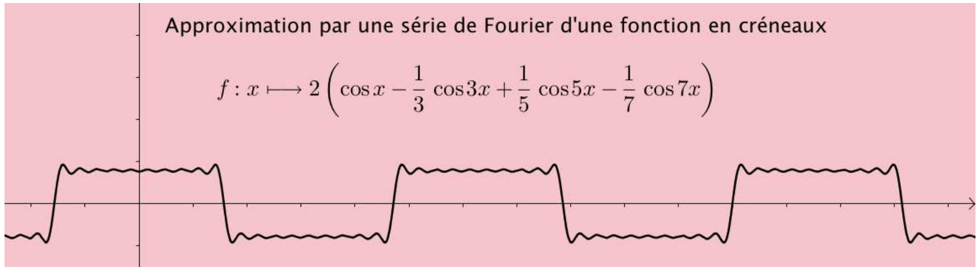
Source : http://www.lyc-vangogh-ermont.ac-versailles.fr/spip.php?article22

Partie C - Situation concrète qui pourrait placer la voiture dans une telle situation de résonance

Sur Géogébra représenter la fonction f définie par :

$$x \longmapsto 2\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x\right)$$

On obtient une approximation d'une fonction en créneau de hauteur environ 3 cm .
Sur l'autoroute à l'arrivée à un péage il peut y avoir des bandes ralentissantes qui ont ce profil.



L'équation différentielle devient :

$$z''(t) + 25z(t) = 50\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x\right) \qquad (E)$$

Celle-ci, un peu plus compliquée, se résout avec le même genre de méthodes et met en évidence l'entrée en résonance à cause du terme dans le second membre $x \longmapsto \frac{1}{5}\cos 5x$

$\omega = 5$