

INERTIE THERMIQUE D'UN BÂTIMENT

Fiche synthétique de l'activité

- Modules concernés : Configurations géométriques, fonctions d'une variable réelle et équations différentielles.
- Thème : Modéliser le refroidissement d'un bâtiment dans le temps en fonction de sa structure.
- Objectifs : Calculer des surfaces et des volumes, résoudre une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.
- Prérequis : Fonction exponentielle, équations différentielles du premier ordre à coefficients constants.
- Compétences visées : S'informer (analyser la problématique), chercher (partie B, en autonomie), modéliser, raisonner/argumenter, calculer/illustrer (interpréter un résultat).
- Outils logiciels : Logiciel de géométrie dynamique ou calculatrice graphique. Éventuellement un logiciel de calcul formel pour la partie B, selon le scénario.
- Scénario : Cette activité peut être mise en œuvre en tant qu'application concrète du cours, en travaux dirigés, en devoir à la maison, ou en contrôle en cours de formation.

Scénario	Partie A (simple et calculatoire)	Partie B	Partie C
TD	À faire à la maison, en préparation du TD.	En classe, environ 1 h ^(a)	
DM	À faire en classe, en préparation du devoir.	À la maison ^(a)	
CCF	À faire, à réduire ou à supprimer.	En autonomie, en supprimant les questions 1 et 2. ^(b)	Choisir un ou plusieurs cas parmi les quatre. ^(a)

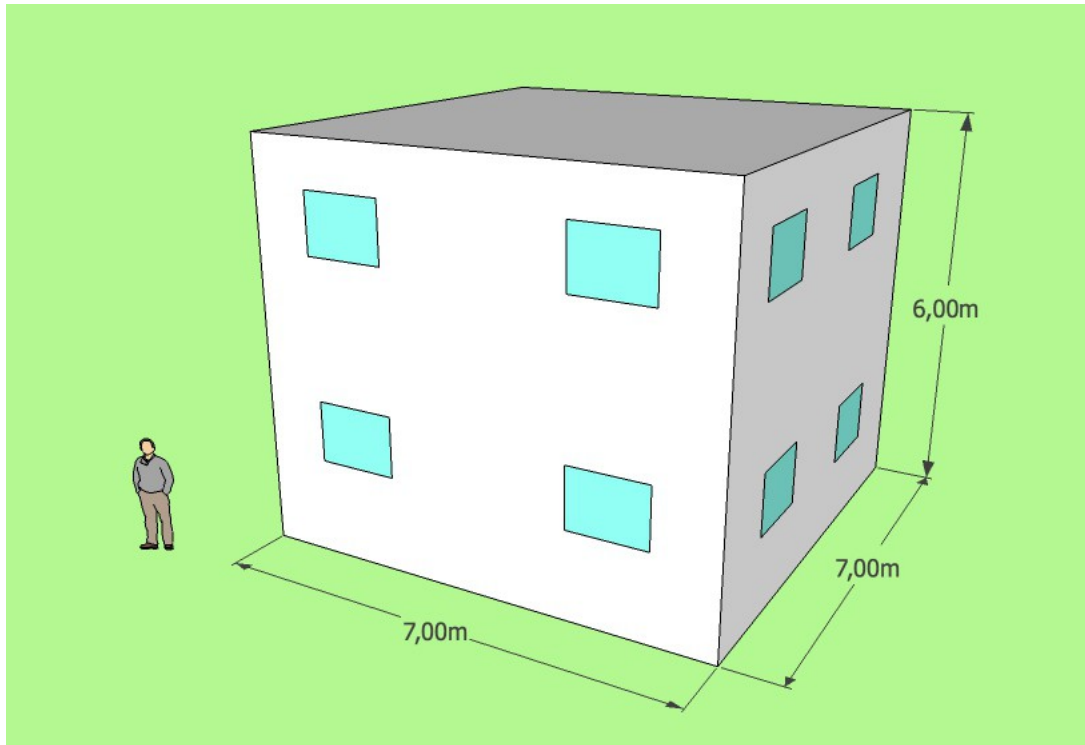
(a) La partie C présente quatre cas d'exploitation de la solution particulière, en fonction de la structure du bâtiment. L'enseignant est libre de choisir ceux qu'il désire traiter avec les élèves.

(b) Mise en œuvre d'une démarche d'investigation à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

- Approfondissements : Modifier le volume du bâtiment et constater son impact sur la réponse au problème. Modéliser une ventilation intérieur ↔ extérieur.
- Interdisciplinarité : Situation issue de la thermodynamique, liée au développement durable et à l'éco-conception.

INERTIE THERMIQUE D'UN BÂTIMENT

On considère un bâtiment, modélisé par le pavé ci-dessous.



Le problème est le suivant : si la température intérieure du bâtiment est de 20°C, si la température extérieure est de 4°C, et si l'on coupe le système de chauffage, de combien de temps dispose-t-on avant de passer sous les 10°C à l'intérieur du bâtiment ?

Partie A - Surface, volume et masse

Avant de répondre, il est nécessaire de calculer certaines grandeurs physiques liées au bâtiment.

1. D'après le schéma ci-dessus, quelle est le volume d'air contenu dans le bâtiment ? Nous l'appellerons V_{air} .
2. Sachant que la masse volumique de l'air, notée ρ_{air} , est de 1,2 kg/m³, calculer la masse de l'air contenu dans le bâtiment ⁽¹⁾.
3. On considère que les parois du bâtiment, y compris le sol et le plafond, sont constituées de béton banché, de 12 cm d'épaisseur. Sachant que 10% des façades latérales sont vitrées, calculer le volume de béton constituant la paroi vue de face ?
4. En déduire le volume total de béton constituant le bâtiment. Nous l'appellerons $V_{béton}$.
5. Sachant que la masse volumique du béton banché, notée $\rho_{béton}$, est de 2300 kg/m³, calculer la masse de béton constituant le bâtiment ⁽¹⁾.

Appeler le professeur pour un contrôle ⁽²⁾.

Partie B - Mise en équation

Les lois physiques (Newton et Fourier) modélisent le flux de chaleur et la déperdition d'énergie, et permettent d'aboutir à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\theta}{dt} = -k \times (\theta - 4) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta : \text{température intérieure, fonction du temps} \\ t : \text{temps en seconde} \\ 4 : \text{température extérieure, constante (4 °C)} \\ k : \text{coefficient dépendant de la structure du bâtiment} \end{cases}$$

1. Montrer que l'équation ci-dessus est équivalente à l'équation (E) : $\theta'(t) + k\theta(t) = 4k$.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions solutions de (E).
3. Sachant que la température intérieure du bâtiment est de 20°C à $t=0$, déduire de ce qui précède la température intérieure du bâtiment en fonction du temps t exprimé en secondes.

□ Appeler le professeur pour un contrôle ⁽²⁾.

Partie C - Évolution de la température

La température intérieure du bâtiment exprimée en °C, en fonction du temps t exprimé cette fois en heure, est modélisée par la fonction θ_h suivante :

$$\theta_h(t) = 16e^{-3600kt} + 4$$

Le coefficient k est fonction de nombreux paramètres : $k = \frac{\lambda}{m_{\text{béton}} c_{\text{béton}} \times \alpha + m_{\text{air}} \cdot c_{\text{air}}}$

avec

- $c_{\text{béton}} = 1000 \text{ J/kg.K}$: capacité thermique massique du béton
- $c_{\text{air}} = 1006 \text{ J/kg.K}$: capacité thermique massique de l'air
- λ et α deux paramètres liés à l'isolation du bâtiment.

1. Cas du bâtiment non isolé

- a) On a $\lambda = 1013 \text{ J/K}$ et $\alpha = 0,27$. Calculer le coefficient k .
- b) Tracer la courbe représentative de la température intérieure (en °C) en fonction du temps (en heure) en utilisant un logiciel de géométrie dynamique, ou la calculatrice.
- c) À l'aide du graphique, répondre au problème initial.

2. Cas du bâtiment isolé par l'intérieur

- a) On a $\lambda = 96 \text{ J/K}$ et $\alpha = 0,05$. Calculer le coefficient k .
- b) Dans le même repère que le cas précédent, tracer la courbe représentative de la température intérieure en fonction du temps. Que constate-t-on ?
- c) À l'aide du graphique, répondre au problème initial.

3. Cas du bâtiment isolé par l'extérieur

- a) On a $\lambda = 96 \text{ J/K}$ et $\alpha = 0,94$. Calculer le coefficient k .
- b) Dans le même repère que les cas précédents, tracer la courbe représentative de la température intérieure en fonction du temps. Que constate-t-on ?
- c) À l'aide du graphique, répondre au problème initial.

4. Cas du bâtiment à construire

On veut isoler un bâtiment neuf correspondant au problème initial, et l'on souhaite disposer de 24 heures avant que la température intérieure ne descende sous les 10°C .

- a) À l'aide du logiciel de géométrie dynamique et de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient k .
- b) On considère que le paramètre λ est fixé à 96 J/K . Déduire du résultat précédent une valeur approchée à 10^{-2} près du paramètre α .

Appeler le professeur pour un contrôle ⁽²⁾.

Notes

(1) : selon la spécialité du BTS concerné, il pourra être utile de rappeler que la masse m d'un solide, d'un liquide ou d'un gaz homogène est le produit de son volume V par sa masse volumique ρ : $m = V \times \rho$

(2) : les appels au professeur sont destinés au TD ou au CCF. Les enlever dans le cas d'un devoir maison.