Les nombres complexes :

Programme complémentaire en vue de la préparation à une poursuite d'études

- **Nombres complexes**

Capacités et connaissances

Capacités	Connaissances
Calculer et interpréter géométriquement dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué, le module d'un nombre complexe et un argument d'un nombre complexe non nul. Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et réciproquement.	Forme algébrique : - partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module ; - égalité de deux nombres complexes ; - représentation dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, affixe d'un point, d'un vecteur ; - somme, produit, quotient de deux nombres complexes ; - conjugué d'une somme, d'un produit, d'un quotient ; - module d'un produit et d'un quotient. Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

I- L’ensemble des complexes et le nombre i :

Sur la calculatrice :

- Calculer $\sqrt{25}$

On trouve : ………

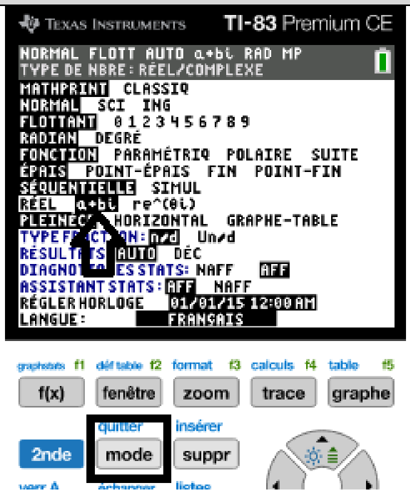
- Calculer $\sqrt{-25}$

On trouve : ………

On ne peut pas calculer la racine carrée d’un nombre négatif dans l’ensemble des réels.

Mais la racine carrée d’un nombre réel négatif existe dans l’ensemble des nombres complexes.

- Changer le mode de votre calculatrice, pour passer en mode complexe :

Texas Instrument	Casio	Numworks
 Appuyer sur la touche mode A la 8ème ligne choisir *a+bi* au lieu de *RéEL* Revenir sur l’écran de calcul avec les touches 2nde mode. Puis refaire le calcul.	 Dans le menu 1:RunMath, appuyer sur les touches Shift Menu puis choisir a+bi dans l’onglet Complex Mode. Appuyer sur Exe puis refaite le calcul.	 Dans l’application Paramètres. Mettre Algébrique dans l’onglet Forme complexe. Puis retourner faire le calcul dans l’application Calculs.

- En mode complexe, calculer $\sqrt{-25}$

On trouve : ………

Il existe un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$, appelé l’ensemble des nombres complexes tel que :

Le nombre i est un nombre dont le carré vaut -1.

On a $i^2 = -1$

Il en découle que $(-i)^2 = -i \times -i = -1$.

$Remarque$: $(5i)^2 = -25$ et $(-5i)^2 = -25$

II- La forme algébrique d'un nombre complexe :

1- Définition :

Tout nombre complexe s'écrit sous forme algébrique : $z = a + ib$, (ou $z = a + jb$), a et b étant des réels.

a est appelé partie réelle de z. $Re(z)$

et b est appelé partie imaginaire de z. $Im(z)$

Si $b = 0$, alors $z = a$ et z est un réel.

Si $a = 0$, alors $z = ib$ et z est un imaginaire pur.

2- Représentation graphique :

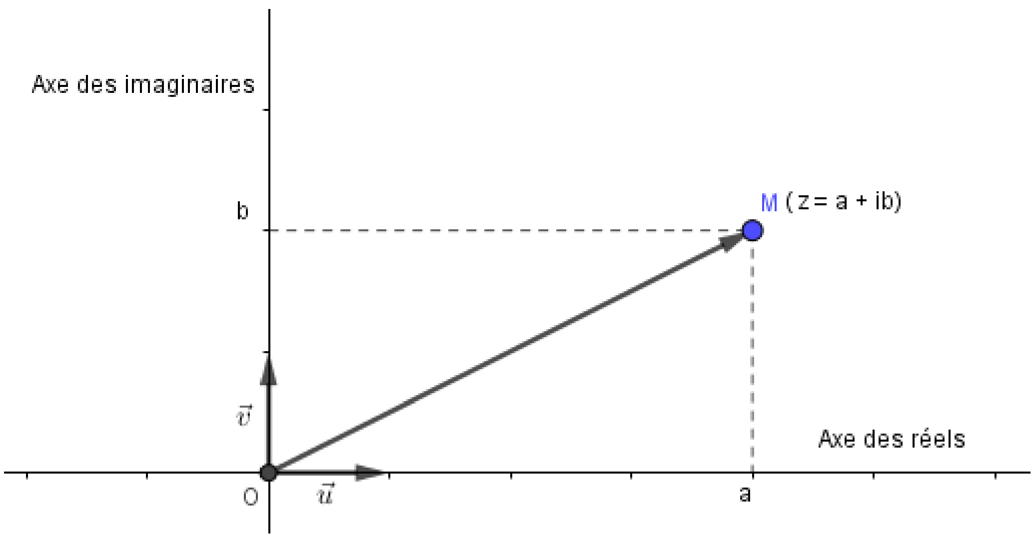
On se place dans un plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ; \vec{v})$.

A tout point M de coordonnées (*a* ;*b*) on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$, on dit que $z = a + ib$ est l'affixe du point M.

a correspond à son abscisse et b correspond à son ordonnée.

A tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées $\binom{a}{b}$ on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$, on dit que $z = a + ib$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

M est appelé image du nombre complexe z.

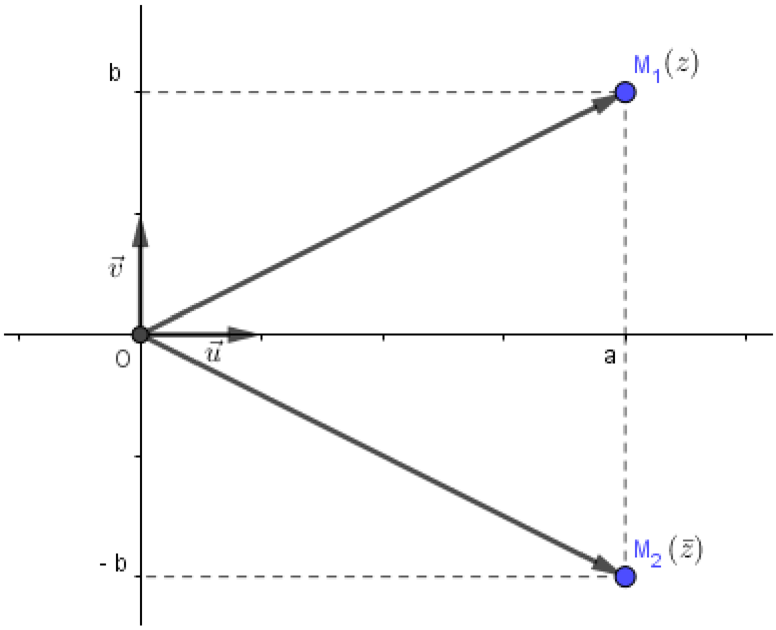


3- Conjugué d'un complexe :

On appelle conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$, le nombre $\bar{z} = a - ib$. (on lit $z\ barre$).

On l'obtient en changeant uniquement le signe de la partie imaginaire.

Graphiquement, le point M_2 d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M_1 d'affixe z par rapport à l'axe des abscisses.



EXEMPLES :

$z_1 = 2 + 3i$	$z_2 = -3 - i\sqrt{2}$	$z_3 = 5$	$z_4 = 5i$
$a = Re(z) =$…………	$a = Re(z) =$………..	$a = Re(z) =$……….	$a = Re(z) =$……….
$b = Im(z) =$………….	$b = Im(z) =$………..	$b = Im(z) =$………..	$b = Im(z) =$………..
$\bar{z_1} =$………………………	$\bar{z_2} =$…………………..	$\bar{z_3} =$…………………..	$\bar{z_4} =$…………………..

EXERCICES 1 et 2 : en suivant le lien : https://learningapps.org/watch?v=p5ukc87vn22 ,

réaliser l'exercice en ligne n° 1 et 2.

4- Calculs avec des nombres complexes :

Soient 2 nombres complexes z et z' tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$:

z et z' sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

$$z = z' \quad si\ et\ seulement\ si \quad a = a'\, et\ b = b'$$

La somme :

La somme de deux nombres complexes est donnée par : $\quad z + z' = (a + a') + i(b + b')$

Méthode : Pour réaliser la somme (addition et/ou soustraction) de nombres complexes, on regroupe les parties réelles entre elles et on fait de même avec les parties imaginaires.

EXEMPLES :

Soit $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = -3 - 2i$

- Calculer $z_1 + z_2 =$………

……

- Calculer $z_1 - z_2 =$………

……

- Calculer $z_1 + \overline{z_2} =$………

……

Le produit :

Le produit d'un nombre complexe par un réel k est donné par : $\quad kz = ka + ikb$

Méthode : Le produit par un réel se réalise par un développement classique en respectant les règles de signe.

EXEMPLES :

- Calculer $2z_1 =$……
- Calculer $-3z_2 =$………

Le produit de deux nombres complexes est donné par : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Méthode : Pour réaliser le produit de 2 nombres complexes on suit les étapes suivantes :

- Réalisation de la double distributivité.
- Remplacement de i^2 par -1 s'il est présent.
- Application des règles de la somme.

EXEMPLES :

- Calculer $z_1 \times z_2 =$……………………………………………………………………………………

………

………

- Calculer $z_1 \times \overline{z_1} =$……………………………………………………………………………………

………

………

Remarque : le produit d'un nombre complexe par son conjugué est un nombre réel. $\mathrm{z} \times \overline{\mathrm{z}} = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2$

EXERCICE 3 :

Réaliser les calculs suivants, puis vérifier vos réponses en suivant le lien :
https://learningapps.org/watch?v=p5ukc87vn22

Soient les nombres complexes suivants : $z_1 = -1 + 3i$; $z_2 = 2 - 2i$ et $z_3 = 4 - i$.

- Calculer $z_1 + z_2 =$

- Calculer $\overline{z_1} - \overline{z_3} =$

- Calculer $z_1 + \overline{z_2} - z_3 =$

- Calculer $3z_1 + 2z_2 =$

- Calculer $-2z_1 - 3z_3 =$

- Calculer $4z_1 - z_2 + 2z_3 =$

- Calculer $z_1 z_2 =$

- Calculer $\overline{z_1} z_3 =$

- Calculer $3z_2 z_3 =$

- Calculer $z_1 z_2 z_3 =$

- Calculer ${z_1}^2 =$

- Calculer ${z_3}^2 =$

- Calculer $z_1 {z_2}^2 =$

Le quotient de 2 nombres complexes :

Méthode : Pour réaliser le quotient de nombres complexes on suit les étapes suivantes :

1- On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.
2- On réalise les produits au numérateur et au dénominateur.
3- On écrit le nombre complexe sous la forme $a + ib$.
4- On simplifie la partie réelle et imaginaire si possible.

EXEMPLES :

- Simplifier $\frac{3+i}{4-2i} =$

EXERCICES 4 :

Simplifier les quotients suivants puis vérifier vos réponses en suivant le lien :
https://learningapps.org/watch?v=p5ukc87vn22

Simplifier $\frac{5}{1-i} =$

Simplifier $\frac{3-4i}{2+3i} =$

Simplifier $\frac{2}{2-2i} =$

Simplifier $\frac{i}{3+3i} =$

Simplifier $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} =$

Simplifier $\frac{2+i}{4+3i} =$

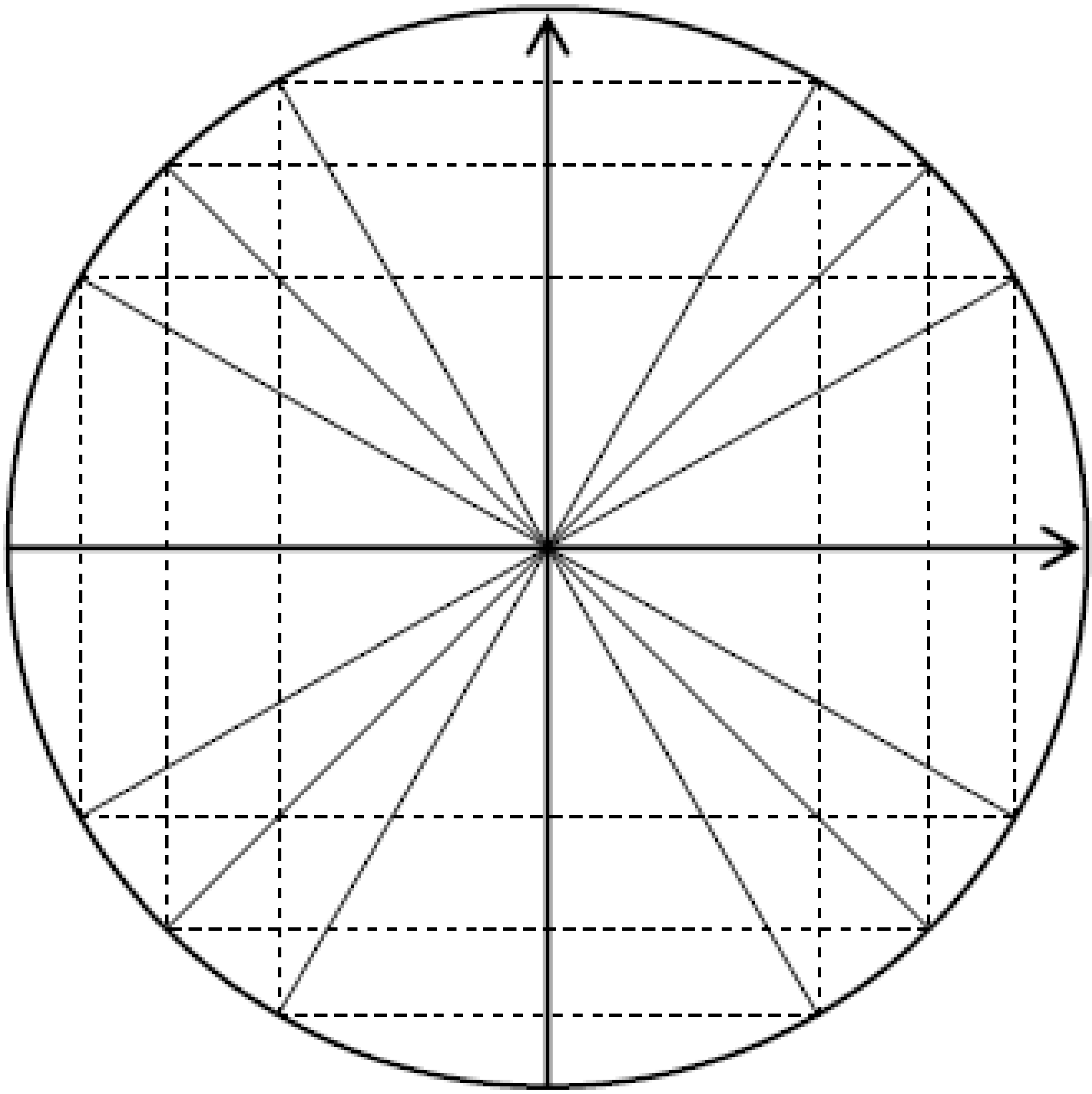
Simplifier $\frac{2-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i} =$

Simplifier $\frac{1-i}{3+i} =$

RAPPEL SUR LE CERCLE TRIGONOMETRIQUE :

EXERCICE 5 : en suivant le lien : https://learningapps.org/watch?v=p5ukc87vn22 .

réaliser l'exercice en ligne n° 5 puis compléter les mesures principales des angles en radian sur le rappel ci-dessous :



III- La forme trigonométrique d'un nombre complexe:

1- Module d'un complexe :

Le module du complexe z est le réel positif noté ρ ou $|z|$ tel que $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Le module d'un nombre complexe z correspond à la distance OM entre l'image M de z et l'origine O du repère.

Il correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Module d'un produit : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

Module d'un quotient : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

2- Argument d'un complexe non nul :

On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$,

On note $\theta = \arg(z)$

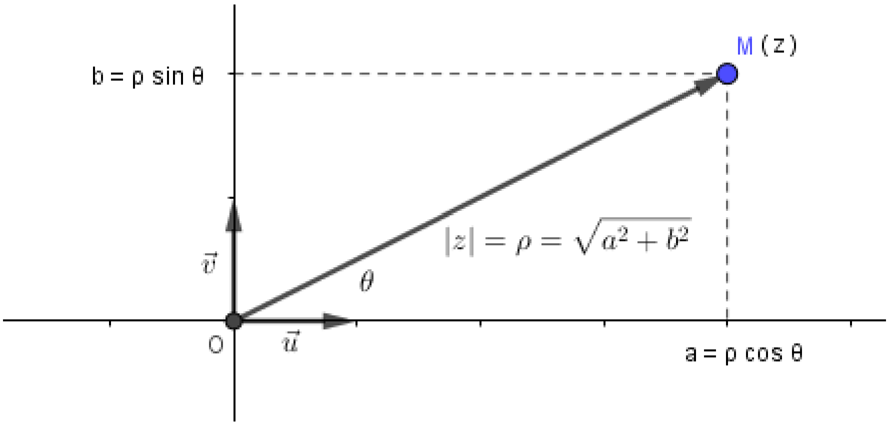
θ vérifie $cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\rho}$ et $sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\rho}$.

3- Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme $z = \rho(cos\theta + isin\theta)$

avec : $\theta = \arg(z)$ (l'argument de z) et $|z| = \rho$ le module de z.

On écrit également $z = [\rho\ ;\ \theta]$.



Méthode : comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique :

Calculer le module, puis l'argument du nombre complexe et en déduire la forme trigonométrique.

EXERCICE 6 : Déterminer le module et l'argument puis écrire les nombres complexes suivant sous forme trigonométrique, puis vérifier vos réponses en suivant le lien : https://learningapps.org/watch?v=p5ukc87vn22 :

$z_1 = 1 + i$

$z_2 = \sqrt{3} - i$

$z_3 = 1 + i\sqrt{3}$

$z_4 = -7i$

Méthode : Comment passe de la forme trigonométrique à la forme algébrique :

Dans la forme trigonométrique : $z = \rho(cos\theta + isin\theta)$

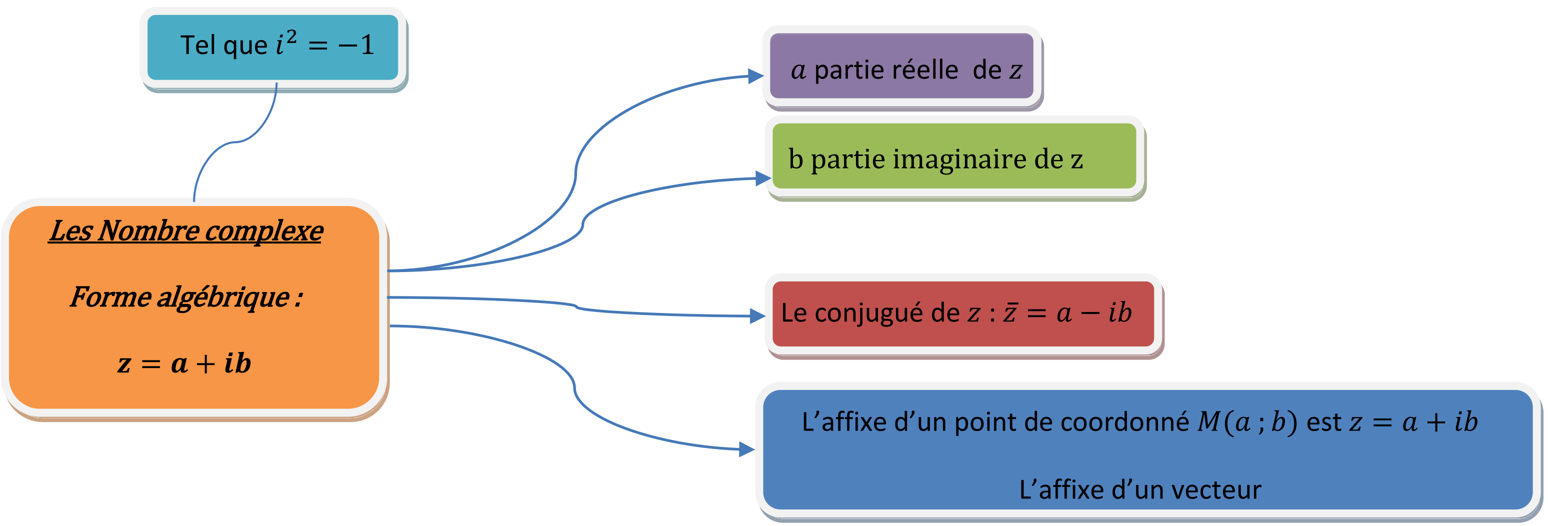
On repère le module ρ et l'argument θ du nombre complexe.

On calcul $a = \rho\cos(\theta)$ et $b = \rho\ sin(\theta)$. On en déduit $z = a + ib$.

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_5 = 2(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-3\pi}{4}\right))$

$z_6 = 4(\cos(\pi) + isin(\pi))$


Tel que $i^2 = -1$
Les Nombre complexe
Forme algébrique :
$\boldsymbol{z = a + ib}$
a partie réelle de z
b partie imaginaire de z
Le conjugué de z : $\bar{z} = a - ib$
L'affixe d'un point de coordonné $M(a\,;b)$ est $z = a + ib$
L'affixe d'un vecteur

Les Nombre complexe

Forme trigonométrique :

$\boldsymbol{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$

Module d'un complexe noté $\rho = |z|$

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

L'argument d'un complexe noté $\theta = \arg(z)$

$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$