ÉTUDE D'UNE TENSION PÉRIODIQUE

THÈME:

Calcul intégral

OBJECTIFS DE L'ACTIVITÉ :

- Approche numérique et graphique d'une valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.
- Utilisation d'un logiciel de calcul formel et d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Utilisation de la calculatrice pour vérifier les résultats en appliquant la relation de Chasles.

PRÉREQUIS NÉCESSAIRES :

- Fonctions périodiques.
- Calcul intégral et propriétés de l'intégrale.
- Connaissances de base d'un logiciel de calcul formel et d'un logiciel de géométrie dynamique.

COMPÉTENCES VISÉES :

- Raisonner, vérifier la cohérence d'un résultat avec la calculatrice, avec une représentation graphique
- S'approprier un logiciel de calcul formel et de géométrie dynamique.

CAPACITÉS DU PROGRAMME TRAVAILLÉES :

- Approche numérique et graphique d'une valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.
- Relation de Chasles de l'intégrale
- Savoir utiliser la calculatrice pour vérifier le calcul d'une intégrale.

OUTILS :

- Utilisation d'un logiciel de calcul formel et d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Utilisation de la calculatrice

APPROFONDISSEMENTS OU MODIFICATIONS POSSIBLES :

Partie E : Démonstration de la formule de la tension efficace en fonction de $u(t)$.

SCÉNARIO PÉDAGOGIQUE, TEMPS ESTIMÉ :

- Séance d'une heure en salle informatique.
- Les élèves travaillent par groupe de 4. Après avoir traité la partie A, ils se répartissent la partie B et la partie C. Restitution au groupe des 4, mise en commun des méthodes utilisées.
  Résolution de la partie D par l'ensemble du groupe.
- Une fiche d'instructions des logiciels pouvant être utilisés sera distribuée.

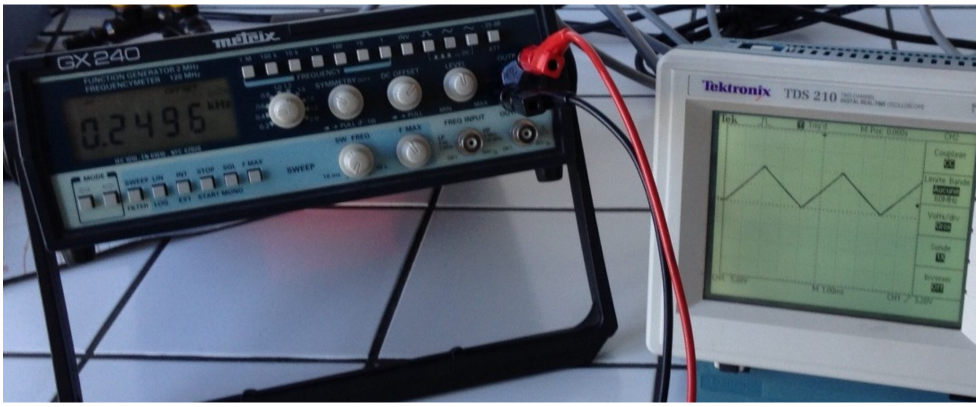
INTERDISCIPLINARITÉ :

Physiques appliquées

Étude d'une tension périodique

On appelle $u(t)$ la tension en volts en fonction du temps t (en ms).
Étudions la valeur moyenne $\langle u(t) \rangle$ et la valeur efficace U de cette tension $u(t)$ sur une période.

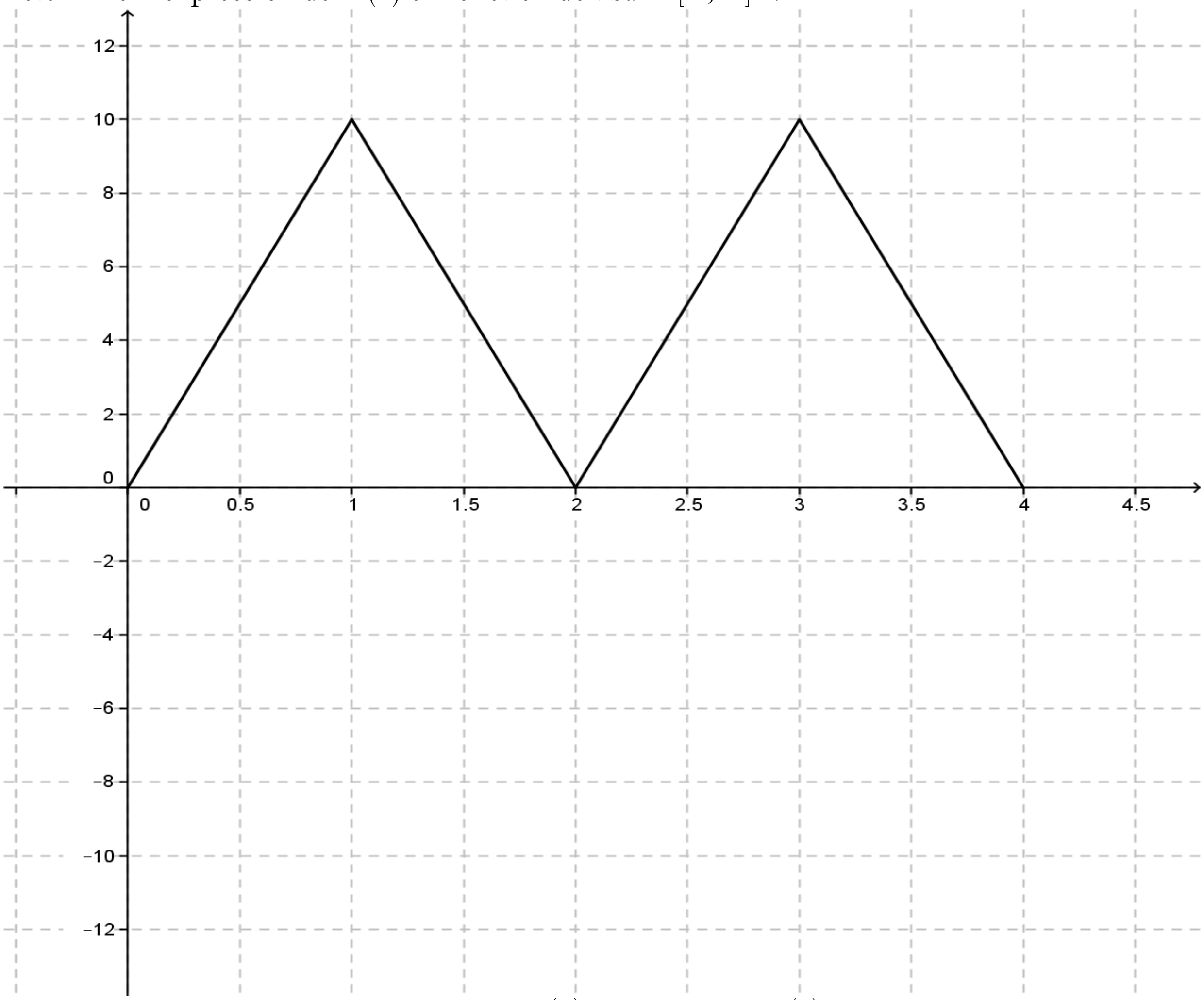
La valeur efficace d'une tension périodique est la tension continue constante qui dissiperait la même puissance qu'un dipôle purement résistif. En Physique, on mesure la valeur moyenne $\langle u(t) \rangle$ à l'aide d'un voltmètre en position DC, et la valeur efficace U à l'aide d'un voltmètre en position DC+AC



Partie A : Lectures graphiques

Le montage ci-dessus nous permet d'avoir le signal $u(t)$ représenté ci-dessous :

1. Déterminer la période T de $u(t)$.
2. Déterminer l'expression de $u(t)$ en fonction de t sur $[0\,;T]$.



3. A l'aide de la représentation graphique de $u(t)$, déterminer $\langle u(t) \rangle$ sur $[0\,;2]$.

Partie B : Par calcul

Soit $u(t)$ le signal périodique de période $T=2$ ms tel que $\begin{cases} u(t)=10t & \text{si } 0<t\leq 1 \\ u(t)=-10t+20 & \text{si } 1<t\leq 2 \end{cases}$.

La valeur moyenne $\langle u(t)\rangle$ sur $[0;T]$ est donnée par $\langle u(t)\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$

et la valeur efficace U de la tension $u(t)$ sur $[0;T]$ est donnée par $U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}$

1. En utilisant un logiciel si besoin, calculer la valeur moyenne $\langle u(t)\rangle$ sur $[0;2]$.
2. En utilisant un logiciel , calculer la valeur efficace U de la tension $u(t)$ sur $[0;2]$.
3. Vérifier vos résultats à l'aide de votre calculatrice.

Partie C : A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la représentation graphique de $u(t)$ sur $[0;2]$.
2. En déduire la valeur moyenne $\langle u(t)\rangle$ sur $[0;2]$.
3. Calculer la valeur efficace U de la tension $u(t)$ sur $[0;2]$.

Partie D :

A chaque instant *t* de $[0;2]$, la tension $u(t)$ est la somme de sa valeur moyenne $\langle u(t)\rangle$ et de sa composante alternative notée $\tilde{u}(t)$, on a alors $u(t)=\langle u(t)\rangle+\tilde{u}(t)$

Soit $\tilde{u}(t)=u(t)-\langle u(t)\rangle$ sur $[0;2]$

1. Représenter $\tilde{u}(t)$ dans le repère donné en partie B.
2. En déduire graphiquement la valeur moyenne $\langle \tilde{u}(t)\rangle$ sur $[0;2]$.
3. Calculer la valeur efficace $\tilde{U}$ de $\tilde{u}(t)$ sur $[0;2]$
4. En Physiques, on utilise la relation $U^2=\tilde{U}^2+\langle u(t)\rangle^2$

   Vérifier cette relation.

Partie E : Approfondissement possible :

On veut démontrer que la valeur efficace U de la tension $u(t)$ sur $[0;T]$ est donnée par $U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}$.

Sachant que la valeur efficace U d'une tension périodique est la tension continue constante qui dissiperait la même puissance qu'un dipôle purement résistif, la puissance dissipée est égale à :

$$\frac{1}{RT}\int_0^T u^2(t)\,dt=\frac{1}{RT}\int_0^T U^2\,dt$$

En déduire l'expression de U en fonction de *u(t).*

Remarque : On pourra mener le même exercice, pour un signal périodique $u(t)$ de période T ms tel que

$$\begin{cases} u(t)=at \text{ si } 0<t\leq\frac{T}{2} \\ u(t)=-at+20 \text{ si } \frac{T}{2}<t\leq T \end{cases}$$ avec a une constante en V/ ms.

Rappels de certaines instructions pour les logiciels XCAS , puis Géogébra

Commandes XCAS

- Définition d'une fonction: $f(t) := 10t$
- Primitive d'une fonction f : $integrate(f(t), t)$
- Intégrale d'une fonction f sur un intervalle [c;d] : $integrate(f(t), t, c, d)$

Commandes Géogébra

- Définition d'une fonction: $f(t) = a\,t + b$
- Définition d'une fonction sur un intervalle [c;d] : $si[c \leq t \leq d\ ;\ at + b]$
- Primitive d'une fonction f : $Intégrale[f, t]$
- Intégrale d'une fonction f sur un intervalle [c;d] : $Intégrale[f, c, d]$